O Campo Vetorial, o Fluxo e a Conservação da Energia

Vamos interpretar geometricamente as Equações de Hamilton

$$\frac{d}{dt}(x,p) = \left(\frac{\partial H}{\partial p}(x,p), -\frac{\partial H}{\partial x}(x,p)\right) \quad \text{com} \quad (x,p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Associada às Equações de Hamilton, temos a função

$$\boxed{(x,p) \longmapsto \left((x,p), \left(\frac{\partial H}{\partial p}(x,p), -\frac{\partial H}{\partial x}(x,p)\right)\right).}$$

Essa função define um campo vetorial em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, chamado **campo vetorial hamiltoniano**. A primeira componente da função especifica o ponto base e a segunda componente o vetor no ponto base. Definimos

$$F_H(x,p) = \left(\frac{\partial H}{\partial p}(x,p), -\frac{\partial H}{\partial x}(x,p)\right).$$

Logo, podemos reescrever as Equações de Hamilton como

$$\frac{d}{dt}(x,p) = F_H(x,p),$$

ou ainda

$$\dot{z} = F_H(z),$$

onde $z = (x,p)$ e $\dot{z} = dz/dt$.

Seja $t \mapsto z(t)$ uma curva solução das Equações de Hamilton. Em cada instante t, o vetor tangente a essa curva é dado por

$$\big(z(t), \dot{z}(t)\big) = \big(z(t), F_H(z(t))\big).$$

Portanto, se ζ pertence à orbita da solução, então a reta tangente à orbita no ponto ζ é gerada pelo vetor $F_H(\zeta)$.

Em resumo, observamos os seguintes fatos:

1. A cada sistema hamiltoniano corresponde um campo vetorial.

2. Todo vetor tangente a uma curva solução é dado por um vetor do campo vetorial.

Esses fatos sugerem que as propriedades do campo vetorial estão relacionadas às propriedades das soluções do sistema de equações, quando as soluções são vistas como curvas no espaço de fases. Essa **interpretação geométrica** é útil para o estudo de sistemas hamiltonianos. Usando esse ponto de vista, podemos obter informações qualitativas sobre as soluções sem resolver o sistema de equações.

Apresentamos a seguir alguns exemplos de análise qualitativa em sistemas hamiltonianos.

Considere uma solução $t \mapsto z(t)$ das Equações de Hamilton que passa por z_0 quando $t = 0$. É possível que essa solução passe novamente por z_0 em um instante $\tau > 0$? Vejamos. Se isso ocorresse, o vetor tangente à curva solução no ponto $z(0)$ seria igual ao vetor tangente no ponto $z(\tau)$. Tendo em vista a unicidade de soluções, isso sugere que órbita da solução para $t > \tau$ irá repetir a órbita original (de t_0 a τ). Portanto, **é possível que a órbita seja uma curva fechada**. Por outro lado, **uma órbita não pode cruzar a si mesma**. Se tal cruzamento ocorresse, deveriam existir dois vetores tangentes diferentes do mesmo campo vetorial no ponto de cruzamento, o que é impossível.

Considere agora duas soluções $t \mapsto z(t)$ e $t \mapsto z'(t)$ das Equações de Hamilton que passam por z_0 e z'_0, respectivamente, quando $t = 0$ (aqui, supomos que $z_0 \neq z'_0$). Repetindo o argumento acima, é simples concluir que $z(t) \neq z'(t)$ para todo t, ou seja, **órbitas diferentes não podem se cruzar**.

Em um terceiro exemplo de análise qualitativa, consideremos um sistema hamiltoniano com um grau de liberdade inicialmente. O espaço de fases é portanto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Nesse caso, o campo vetorial hamiltoniano é obtido do campo gradiente de H por uma rotação de 90^o no sentido negativo:

$$F_H = \begin{bmatrix} H_p \\ -H_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_p \end{bmatrix}.$$

De forma mais geral, usando a matriz

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix},$$

onde I é a matriz identidade $n \times n$ e 0 é a matriz nula $n \times n$, podemos escrever

$$F_H(x, p) = J(\operatorname{grad} H)(x, p).$$

Portanto, se $t \mapsto z(t)$ é uma solução das Equações de Hamilton, em cada ponto dessa curva o vetor tangente é ortogonal ao vetor gradiente de H:

$$\langle F_H, \operatorname{grad} H\rangle = \langle J(\operatorname{grad} H), \operatorname{grad} H\rangle = 0.$$

Logo, como o vetor gradiente de H (no domínio de H) indica a direção de maior crescimento da função H, concluímos que **o valor de H é constante ao longo de uma solução**. Além disso, concluímos que a norma do vetor tangente à solução em cada ponto é proporcional à norma do gradiente de H:

$$|(\dot{x}, \dot{p})| = |J(\operatorname{grad} H)| = |\operatorname{grad} H|.$$

Portanto, a diminuição da distância entre linhas de nível indica um aumento da velocidade da curva solução.

As linhas de nível de $H(x, p)$ são conjuntos invariantes do sistema (isto é, uma solução cujo dado inicial pertence a uma curva de nível permanece na curva de nível). Os pontos de equilíbrio de um sistema também são conjuntos invariantes. Dizemos que $(\bar{x}, \bar{p})$ é um **ponto de equilíbrio** se $F_H(\bar{x}, \bar{p}) = 0$. Os pontos de equilíbrio do sistema correspondem a soluções que são funções constantes: $(x(t), p(t)) = (\bar{x}, \bar{p})$ para todo t. Soluções desse tipo são chamadas **soluções estacionárias**.

O conjunto das soluções das Equações de Hamilton

$$\dot{z} = F_H(z) \quad \text{com} \quad z \in \mathbb{R}^{2n}$$

define um grupo ϕ a 1-parâmetro chamado **fluxo de fases**. Definimos a função $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ da seguinte forma: Para $\zeta \in \mathbb{R}^{2n}$, seja $t \mapsto z(t)$ a solução das Equações de Hamilton tal que $z(0) = \zeta$. Definimos $\phi(t, \zeta) = z(t)$.

Sabemos que uma solução das Equações de Hamilton pode não existir para todo $t \in \mathbb{R}$. Todavia, vamos supor que as soluções existem para todo t, por simplicidade. Uma solução que existe para todo t é chamada **solução completa**. Nesse caso, é simples verificar a seguinte propriedade:

$$\phi(s + t, \zeta) = \phi(t, \phi(s, \zeta))$$

para todo $s, t \in \mathbb{R}$. De fato, definimos $\psi(t) = \phi(s+t, \zeta)$ e $\gamma(t) = \phi(t, \phi(s, \zeta))$, e observamos que $t \mapsto \psi(t)$ e $t \mapsto \gamma(t)$ satisfazem a equação $\dot{z} = F_H(z)$ com $\psi(0) = \phi(s, \zeta)$ e $\gamma(0) = \phi(s, \zeta)$. Logo, pelo teorema de existência e unicidade de soluções, concluímos que $\psi = \gamma$.

Pelo teorema de dependência contínua nos parâmetros, concluímos que ϕ é uma função diferenciável (supondo que H é de classe C^2). Em particular, para cada $t \in \mathbb{R}$, a função $\zeta \mapsto \phi(t, \zeta)$ é uma aplicação diferenciável em $\mathbb{R}^{2n}$. Se $t = 0$, então $\zeta \mapsto \phi(0, \zeta)$ é a transformação identidade. Observamos também que

$$\zeta = \phi(0, \zeta) = \phi(-t + t, \zeta) = \phi(-t, \phi(t, \zeta)).$$

Em outras palavras, a aplicação $\zeta \mapsto \phi(-t, \zeta)$ é a inversa de $\zeta \mapsto \phi(t, \zeta)$. Portanto $\zeta \mapsto \phi(t, \zeta)$ é um difeomorfismo para cada $t \in \mathbb{R}$.

Em resumo, as propriedades descritas acima significam que o fluxo ϕ é um **grupo de transformações a 1-parâmetro**.

Frequentemente, usa-se as notações $t \mapsto \phi^t(\zeta)$ ou $t \mapsto \phi_t(\zeta)$ em vez de $t \mapsto \phi(t, \zeta)$ para denotar a solução da equação diferencial $\dot{z} = F_H(z)$ com $z(0) = \zeta$. Essas notações enfatizam que o fluxo é uma família a 1-parâmetro de transformações em $\mathbb{R}^{2n}$. Temos então

(i) $\phi_0 = I$.

(ii) $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$.

(iii) $(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$.

Conforme mencionamos acima, sistemas hamiltonianos possuem uma propriedade fundamental chamada **conservação da energia**. Descrevemos a seguir essa propriedade de forma mais precisa.

Considere as Equações de Hamilton associadas à H com a condição inicial $(x(t_0), p(t_0)) = (x_0, p_0)$. Seja $t \mapsto (x(t), p(t))$ a solução desse problema. O número

$$\boxed{E(t) = H(x(t), p(t))}$$

é chamado a **energia** do sistema ao longo da solução no instante t.

Teorema 1 (Conservação da energia). *Para todo t tal que a solução do sistema hamiltoniano existe, temos*

$$\boxed{E(t) = E(t_0).}$$

Ou seja, a energia ao longo de uma solução é constante.

Demonstração. Observamos que $t \mapsto (x(t), p(t))$ é solução das Equações de Hamilton. Usando esse fato e a regra da cadeia, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(t) &= \frac{d}{dt}H(x(t), p(t)) \\
&= \frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t))\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t))\frac{dp}{dt}(t) \\
&= \frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t))\frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t)) + \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t))\left[-\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t))\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo $E(t) - E(t_0) = \int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds}E(s)ds = 0$. Portanto $E(t) = E(t_0)$. ☐

De forma mais geral, qualquer função no espaço de fases que é constante ao longo de uma solução é chamada **constante de movimento**.