A Equação de Newton

Em mecânica clássica, uma partícula é descrita por um ponto no espaço cujas coordenadas são dadas por uma função

$$\begin{aligned} x : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto x(t). \end{aligned}$$

Essa função é chamada a **trajetória** da partícula. A variável t representa o tempo e $x(t)$ representa a **posição** da partícula no instante t.

A **velocidade** da partícula, denotada por v, é definida como a derivada da trajetória em relação ao tempo:

$$v = \frac{dx}{dt}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} v : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto v(t). \end{aligned}$$

Interpretamos $v(t)$ como um vetor com ponto inicial em $x(t)$. O vetor $v(t)$ é tangente à trajetória da partícula no ponto $x(t)$.

A **aceleração** da partícula, denotada por a, é definida como a derivada da velocidade em relação ao tempo:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} a : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto a(t). \end{aligned}$$

Interpretamos $a(t)$ como um vetor com ponto inicial em $x(t)$. O vetor $a(t)$, em geral, não é tangente à trajetória da partícula.

As noções de trajetória, de velocidade e de aceleração permitem descrever o movimento de uma partícula que ocorre em dadas circunstâncias físicas.

Contudo, para determinar o movimento precisamos de noções adicionais. Precisamos das noções de momento e de força, que descrevemos a seguir. Determinar o movimento de uma partícula constitui o problema fundamental da dinâmica.

O **momento** de uma partícula de massa m e velocidade v, denotado por p, é definido como o produto da massa pela velocidade:

$$p = mv.$$

Portanto

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto p(t). \end{aligned}$$

Um **campo de forças**, denotado por F, é definido por uma função

$$\begin{aligned} F : \Omega \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, v, t) &\mapsto F(x, v, t), \end{aligned}$$

onde Ω é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ (ou o próprio $\mathbb{R}^3$). Interpretamos $F(x, v, t)$ como um vetor com ponto inicial em x. Esse vetor representa a força que atua sobre a partícula no ponto x com velocidade v no instante t.

A **Segunda Lei de Newton** diz que "a taxa de variação do momento de uma partícula é igual à força que atua sobre a partícula":

$$\boxed{\frac{dp}{dt} = F(x, v, t).}$$

Ou seja

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right) = F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right). \tag{1}$$

Tal relação entre a função $x(t)$ e suas derivadas é chamada uma equação diferencial. A Equação (1) é chamada a **Equação de Newton**. Dizemos que essa equação é de segunda ordem pois a derivada de maior ordem que ocorre na equação tem ordem 2.

No caso em que a massa m da partícula não varia com o tempo, a Equação de Newton é

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right). \tag{2}$$

Ou seja, o produto da massa pela aceleração é igual à força:

$$\boxed{ma = F(x, v, t).}$$

Se uma partícula se move sob a ação de um campo de forças F, entre todas as possíveis trajetórias para a partícula a partícula irá descrever a trajetória que é solução da Equação de Newton.

Frequentemente, usamos "um ponto" em vez de d/dt para denotar a derivada em relação a t e "dois pontos" para denotar a segunda derivada. Portanto

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \qquad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad \text{etc.}$$

Uma **solução** da Equação (2) é uma função $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$m\ddot{x}(t) = F(x(t), \dot{x}(t), t)$$

para todo t. A variável x é chamada **variável dependente** e t é chamada **variável independente**.

É possível associar à Equação de Newton uma equação equivalente com um número maior de variáveis dependentes. Fazemos isso adicionando v ao conjunto de variáveis dependentes e considerando o sistema

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \frac{1}{m}F(x, v, t). \end{aligned}} \tag{3}$$

Esse é um sistema de equações diferenciais de primeira ordem nas variáveis x e v. É evidente que esse sistema é equivalente à Equação de Newton. Sob certos aspectos, sistemas de primeira ordem são mais simples de investigar do que sistemas de segunda ordem. Por isso é útil considerar o sistema (3) em vez do sistema (2).

Especificar um sistema mecânico composto por uma partícula consiste em especificar um campo de forças F. Dado um campo de forças F, desejamos obter soluções da Equação de Newton, ou pelo menos obter informações sobre as soluções, mesmo que as soluções não sejam conhecidas explicitamente.

Para determinar a trajetória da partícula é necessário impor condições adicionais sobre a solução $x(t)$. Por exemplo, se sabemos que no instante t_0 a partícula se situa em x_0 com velocidade v_0, devemos impor

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, \\ \dot{x}(t_0) &= v_0. \end{aligned}$$

Essas condições são chamadas **condições iniciais**. O número t_0 e os vetores x_0 e v_0 são chamados **dados iniciais**. Observamos que o movimento fica completamente determinado sob essas condições. Uma equação diferencial e condições iniciais constituem um **problema de valor inicial**.

O conjunto de variáveis que especificam a condição do sistema em um instante do tempo é chamado o **estado do sistema**. No presente caso, o estado do sistema é o par

$$(x, v) = (\text{posição, velocidade}).$$

Além disso, para cada valor de t, o problema de valor inicial acima define uma função que associa a cada estado inicial o estado correspondente no instante t:

$$(x_0, v_0) \longmapsto (x(t), v(t)).$$

Em resumo, a Equação de Newton especifica a evolução temporal de um sistema mecânico a partir de um estado inicial.

Sistemas gradientes. Uma classe importante de sistemas mecânicos, que descrevemos a seguir, são os chamados sistemas gradientes. Esses são sistemas em que o campo de forças F pode ser representado como menos o gradiente de uma função. Em sistemas gradientes, o campo de forças F depende apenas da posição:

$$\begin{aligned} F : \Omega &\to \mathbb{R}^3 \\ x &\mapsto F(x), \end{aligned}$$

onde Ω é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ (ou o próprio $\mathbb{R}^3$). Se existir uma função diferenciável $V : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $F(x) = -\nabla V(x)$, onde

$$\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \frac{\partial V}{\partial x_3} \right),$$

dizemos que F é um **campo gradiente**. Use-se também a notação $\operatorname{grad} V$ para representar o gradiente de V. A função V é chamada um **potencial** do campo F. Um mesmo campo F pode ter vários potenciais, mas esses potenciais diferem apenas por uma constante.

Exemplo 1. Para uma constante $k > 0$, considere o campo vetorial F definido por $F(x, y, z) = (-kx, -ky, -kz)$. Então a função V definida por $V(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ é um potencial de F pois

$$F(x, y, z) = -(\nabla V)(x, y, z) = (-kx, -ky, -kz).$$

Portanto, o campo vetorial F em consideração é um campo gradiente.