

As Equações de Hamilton

As Equações de Hamilton formam um sistema de $2n$ equações diferenciais de primeira ordem chamado sistema hamiltoniano. Descrevemos a seguir esse sistema.

Em um sistema hamiltoniano, o **estado** do sistema é representado por um ponto (x, p) no espaço $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, chamado **espaço de fases**. O ponto $x = (x_1, \dots, x_n)$ é chamado a posição do sistema e o ponto $p = (p_1, \dots, p_n)$ é chamado o momento. O espaço \mathbb{R}^n de posições é chamado **espaço de configurações**. O inteiro positivo n é chamado o **número de graus de liberdade** do sistema.

Os nomes posição e momento para as variáveis x e p vêm da Física. Nem sempre as variáveis x e p representam a posição e o momento físicos. Por isso x e p são também chamados posição e momento generalizados e às vezes são denotados por q e p .

Uma função real $H(x, p)$ definida sobre o espaço de fases é chamada uma **hamiltoniana** (ou **função de Hamilton**). Por simplicidade, vamos supor que H é uma função de classe C^2 .

As equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}(x, p) \quad \text{e} \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, p)$$

são chamadas **Equações de Hamilton**. Essas equações correspondem ao seguinte sistema de $2n$ equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_j}(x, p) \\ \frac{dp_j}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_j}(x, p) \end{aligned}$$

para $j = 1, \dots, n$. A variável $t \in \mathbb{R}$ representa o tempo.

Frequentemente, usamos “um ponto” em vez de d/dt para denotar a derivada em relação a t . Portanto

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad \text{e} \quad \dot{p} = \frac{dp}{dt}.$$

Além disso, escrevemos H_x e H_p para denotar as derivadas parciais de H com respeito a x e a p , respectivamente:

$$H_x = \frac{\partial H}{\partial x} \quad \text{e} \quad H_p = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

Em notação compacta, podemos reescrever as Equações de Hamilton como

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_p(x, p) \\ -H_x(x, p) \end{bmatrix},$$

ou ainda

$$\boxed{\dot{z} = F_H(z)}$$

com

$$z = (x, p)$$

e

$$F_H(z) = (H_p(z), -H_x(z)).$$

Para $t_0 \in \mathbb{R}$ e $(x_0, p_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, um sistema hamiltoniano e a condição inicial

$$(x(t_0), p(t_0)) = (x_0, p_0)$$

definem um problema de valor inicial. A constante t_0 é chamada **instante inicial**. O ponto (x_0, p_0) é chamado **estado inicial**. A imagem de uma solução das Equações de Hamilton é chamada uma **órbita**.

Vamos supor que para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ e cada (x_0, p_0) pertencente a um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ o sistema hamiltoniano possui uma única solução $t \mapsto (x(t), p(t))$, definida no intervalo $(t_0 - T, t_0 + T)$ com $T > 0$, tal que $(x(t_0), p(t_0)) = (x_0, p_0)$. Ou seja, vamos supor existência local e unicidade de soluções para o problema de valor inicial.

Uma classe importante de sistemas hamiltonianos é obtida quando a hamiltoniana tem a forma

$$H(x, p) = \frac{1}{2m}p^2 + V(x),$$

onde m é uma constante positiva e $V(x)$ é uma função real (de classe C^2) chamada **potencial**. A função

$$T(p) = \frac{1}{2m}p^2$$

é chamada **função energia cinética**. Tais sistemas são chamados **sistemas gradientes**. Para essa classe de sistemas, as Equações de Hamilton assumem a forma

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m} p \quad \text{e} \quad \frac{dp}{dt} = -\nabla V(x).$$

Quando $n = 3$ e m representa a massa de uma partícula essas equações são respectivamente a definição de momento e a Segunda Lei de Newton para o movimento de uma partícula sob a ação do campo de forças $-\nabla V(x)$. Além disso, nesse caso a hamiltoniana $H(x, p)$ representa a energia total da partícula. Podemos pensar que a função V descreve o relevo de um território que é o espaço de fases. Valores grandes de V correspondem a regiões altas de difícil acesso pois a partícula precisa gastar energia para atingir essas regiões.

No texto *Um Resultado Simples de Existência e Unicidade*, vamos provar que a hipótese de existência e unicidade de soluções é realmente verdadeira (com $T = \infty$) para uma classe de sistemas gradientes.

Sistemas hamiltonianos possuem uma propriedade fundamental chamada **conservação da energia**. Considere as Equações de Hamilton associadas à H com a condição inicial $(x(t_0), p(t_0)) = (x_0, p_0)$. Seja $t \mapsto (x(t), p(t))$ a solução desse problema. O número

$$E(t) = H(x(t), p(t))$$

é chamado a **energia** do sistema ao longo da solução no instante t .

Teorema 1 (Conservação da energia). *Para todo t tal que a solução do sistema hamiltoniano existe, temos*

$$E(t) = E(t_0).$$

Ou seja, a energia ao longo de uma solução é constante.

Demonstração. Observamos que $t \mapsto (x(t), p(t))$ é solução das Equações de Hamilton. Usando esse fato e a regra da cadeia, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &= \frac{d}{dt} H(x(t), p(t)) \\ &= \frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t)) \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t)) \frac{dp}{dt}(t) \\ &= \frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t)) \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t)) + \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t)) \left[-\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t)) \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo $E(t) - E(t_0) = \int_{t_0}^t \frac{d}{ds} E(s) ds = 0$. Portanto $E(t) = E(t_0)$. □

De forma mais geral, qualquer função no espaço de fases que é constante ao longo de uma solução é chamada **constante de movimento**.

Soluções estacionárias. Um tipo especial de solução das Equações de Hamilton, que descrevemos a seguir, são as chamadas soluções estacionárias. Essas são soluções que são funções constantes no tempo, ou seja, são soluções da forma

$$(x(t), p(t)) = (x_0, 0) \quad \text{para todo } t,$$

onde x_0 é um vetor constante. Nesse caso, dizemos que $(x_0, 0)$ é um **ponto de equilíbrio** do sistema. Substituindo uma solução desse tipo nas Equações de Hamilton, concluímos que $\nabla V(x_0) = 0$. Portanto, os pontos de equilíbrio do sistema são os pares $(x_0, 0)$, tais que x_0 é um ponto crítico da função V . Entre esses pontos críticos, os pontos de mínimos locais de V tem um papel importante, pois eles correspondem a pontos de equilíbrio estável. De fato, se assumirmos que a matriz hessiana de V é positiva-definida em um ponto crítico x_0 , as linhas de nível de $H(x, p) = c$ são curvas fechadas na vizinhança de $(x_0, 0)$. Nesse caso, a órbita do sistema permanece próxima a esse ponto para todo t . Por outro lado, na vizinhança de um ponto de máximo local de V (ou ponto de sela para $n \geq 2$), as linhas de nível são curvas abertas e portanto o ponto de equilíbrio é instável. Portanto, os valores críticos de V são especiais para um sistema hamiltoniano. Podemos imaginar que as soluções de um sistema passam a maior parte do tempo na vizinhança de um ponto de equilíbrio, com preferência para pontos de equilíbrio que correspondem a mínimos locais do potencial.

Por fim, vejamos alguns exemplos de sistemas hamiltonianos:

Exemplo 1 (Partícula livre). Considere $n = 3$ e $H(x, p) = \frac{1}{2m}p^2$ para $(x, p) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, onde m é uma constante positiva. Nesse caso, o potencial é $V(x) \equiv 0$ e as Equações de Hamilton são

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{m}p \\ \dot{p} &= 0. \end{aligned}$$