Partícula Livre

Consideremos uma **partícula livre** no espaço euclidiano, ou seja, uma partícula sob a ação do campo de forças $F(x) \equiv 0$. Pela Segunda Lei de Newton, o movimento da partícula é descrito pela equação

$$m\ddot{x} = 0,$$

em que $x = (x_1, x_2, x_3)$ representa a posição da partícula e a constante m representa a massa (veja o texto *A Equação de Newton*).

O momento linear $p = (p_1, p_2, p_3)$ da partícula é definido por $p = mv$, onde $v = \dot{x}$ representa a velocidade da partícula. Usando as variáveis x e p, podemos reescrever a equação de Newton na forma

$$\boxed{\begin{aligned} &\dot{x} = \frac{1}{m}p \\ &\dot{p} = 0. \end{aligned}}$$

Essas são exatamente as Equações de Hamilton associadas à hamiltoniana

$$\boxed{H(x,p) = \frac{1}{2m}p^2}$$

com $(x,p) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ (veja o texto *As Equações de Hamilton*). No presente caso, um potencial de F é a função

$$V(x) \equiv 0.$$

O campo vetorial correspondente é

$$\boxed{(x,p) \longmapsto \big((x,p), (\tfrac{1}{m}p, 0)\big).}$$

As equações acima e a condição inicial

$$(x(0), p(0)) = (x_0, p_0)$$

definem um problema de valor inicial.

Passamos agora à solução das equações. Integrando de 0 a t os dois lados da equação $\dot{p} = 0$ e impondo a condição inicial $p(0) = p_0$, concluímos que

$p(t) = p_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Consequentemente, usando a equação $\dot{x} = \frac{1}{m}p$, obtemos $\dot{x} = \frac{1}{m}p_0$. Integrando de 0 a t os dois lados dessa igualdade e impondo a condição inicial $x(0) = x_0$, obtemos $x(t) = x_0 + t\frac{1}{m}p_0$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$(x(t), p(t)) = (x_0 + t\tfrac{1}{m}p_0, p_0) = (x_0, p_0) + t(\tfrac{1}{m}p_0, 0).$$

Como esperado, a energia ao longo de uma solução é constante:

$$E(t) = H(x(t), p(t)) = \frac{1}{2m}p(t)^2 = \frac{1}{2m}p_0^2 = H(x_0, p_0) = E(0).$$

Consideremos agora uma partícula livre em uma reta. Nesse caso, o sistema tem um grau de liberdade e o espaço de fases é $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. O que fizemos acima para a partícula no espaço se aplica à partícula na reta, basta substituir $\mathbb{R}^3$ por $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ por $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Em particular, a solução do problema é

$$(x(t), p(t)) = (x_0 + t\tfrac{1}{m}p_0, p_0) = (x_0, p_0) + t(\tfrac{1}{m}p_0, 0).$$

A curva $t \mapsto (x(t), p(t))$ é uma reta no espaço de fases. Na Figura 1, temos um gráfico do retrato de fases e na Figura 2 um gráfico do campo vetorial $(x, p) \mapsto ((x, p), (\frac{1}{m}p, 0))$. Os pontos da reta $p = 0$ são **pontos de equilíbrio** do sistema.

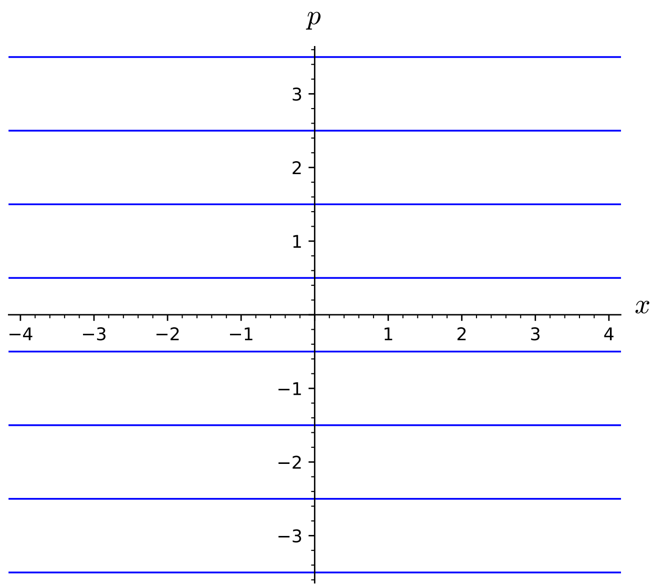

Figura 1: Retrato de fases para a partícula livre em uma reta.

Agora, observamos que cada órbita da partícula livre em uma reta pode ser obtida usando o conjunto

$$\mathcal{H} = \{(x, p) \mid H(x, p) = H(x_0, p_0)\} = \{(x, p) \mid p^2 = p_0^2\}.$$

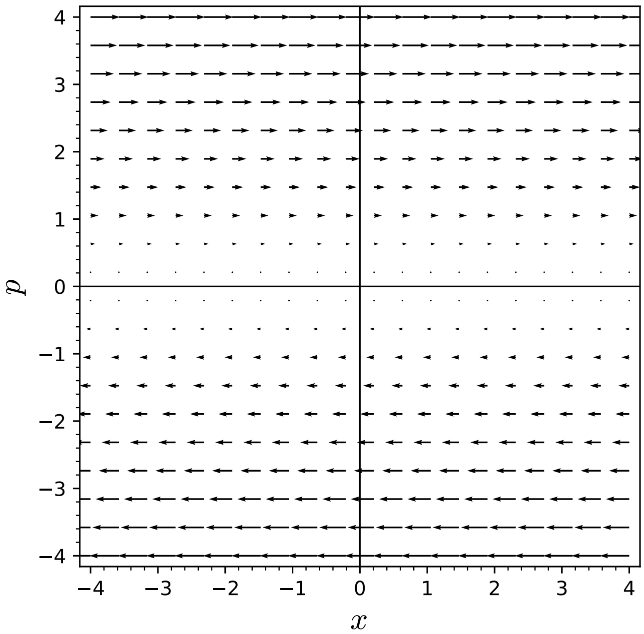

Figura 2: Campo vetorial hamiltoniano para a partícula livre em uma reta.

Se $(x, p) \in \mathcal{H}$, então $x \in \mathbb{R}$ e $p = \pm p_0$. Obtemos assim duas retas no espaço de fases. Como $p(0) = p_0$, concluímos que a órbita da partícula é a reta

$$\{(x, p) \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } p = p_0\}.$$

Esse conjunto é exatamente a imagem da curva solução $t \mapsto (x(t), p(t))$.

Enfatizamos que a existência de constantes de movimento simplifica a análise do sistema. Em alguns casos, usa-se as constantes de movimento para reduzir o número de equações do sistema e assim torná-lo mais simples ou explicitamente solúvel. Note que foi isso que fizemos acima no caso da partícula livre.

Por fim, descrevemos o fluxo de fases associado às Equações de Hamilton. Por simplicidade, consideramos apenas o caso unidimensional. A solução das Equações de Hamilton pode ser escrita na forma

$$(x(t), p(t)) = \phi_t(x_0, p_0),$$

em que $\phi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é o fluxo de fases associado. Tendo em vista a fórmula acima para $(x(t), p(t))$, obtemos

$$\phi_t(x, p) = (x + t\tfrac{1}{m}p, p).$$

É simples verificar que ϕ_t satisfaz as propriedades

(i) $\phi_0 = I$.

(ii) $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$.

(iii) $(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$.

No presente caso, podemos escrever

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t/m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, o fluxo de fases ϕ_t é uma transformação linear cuja matriz é

$$\begin{bmatrix} 1 & t/m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sagemath code

```
def orbplot(x0, p0):
    t = var('t')
    a, b = -10, 10
    return parametric_plot((x0 + t*p0, p0), (t, a, b))

x0 = 0
p0 = -3.5
retrato = orbplot(x0, p0)
n = 7
for j in range(n):
    p0 += 1
    x0 = x0
    retrato += orbplot(x0, p0)

retrato.xmin(-4)
retrato.xmax(4)
retrato.axes_labels(['$x$', '$p$'])
show(retrato)

x, y = var('x y')
p = plot_vector_field((y,0), (x,-4,4), (y,-4,4), aspect_ratio=1)
p.axes_labels(['$x$', '$p$'])
show(p)
```