A Equação de Poisson e o Delta de Dirac

Consideremos uma distribuição contínua de matéria com carga elétrica em uma região Ω do espaço euclidiano. Denotamos por $\rho(x)$ a **densidade de carga** dessa distribuição no ponto $x \in \mathbb{R}^3$. Portanto, a carga elétrica total na região Ω é dada por

$$\int_\Omega \rho(x)\,\mathrm{d}x.$$

Da **eletrostática**, sabe-se que o **campo elétrico** $E(x)$ gerado por essa distribuição de cargas satisfaz a **Lei de Gauss**

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0}\rho,$$

onde ϵ_0 é uma constante física. Além disso, o campo elétrico satisfaz a **Lei de Faraday** na ausência de campos magnéticos que variam com o tempo:

$$\nabla \times E = 0.$$

Denotamos por ∇ o operador gradiente com respeito às variáveis espaciais $x = (x^1, x^2, x^3)$. Logo $\nabla \cdot E$ é o divergente de E e $\nabla \times E$ é o rotacional de E. Supomos que existe uma função $\varphi(x)$, chamada **potencial elétrico**, tal que

$$E = -\nabla\varphi.$$

Em outras palavras, procuramos uma solução E para as equações acima da forma $-\nabla\varphi$. Nesse caso, a Lei de Faraday é satisfeita, pois o rotacional do gradiente é zero. Portanto, substituindo a expressão para E na Lei de Gauss, obtemos a **Equação de Poisson** para o potencial φ:

$$\boxed{\Delta\varphi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho.}$$

Denotamos por Δ o laplaciano com respeito às variáveis espaciais. Sabe-se que a solução da Equação de Poisson é dada por

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_\Omega \frac{1}{|x-y|}\rho(y)\,\mathrm{d}y. \tag{1}$$

Em regiões do espaço em que a densidade de carga é nula, o potencial φ satisfaz a **Equação de Laplace**

$$\boxed{\Delta\varphi = 0.}$$

Uma função φ de classe C^2 que satisfaz a Equação de Laplace é chamada uma **função harmônica**.

No caso em que a distribuição de cargas é uma partícula no ponto x_1, com carga q_1, sabe-se também que o potencial no ponto x é dado por

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|x - x_1|}.$$

Esse resultado pode ser generalizado para uma **distribuição puntual de cargas**, ou seja, uma distribuição de N partículas localizadas nos pontos $x_1, \ldots, x_N$ com cargas $q_1, \ldots, q_N$. Nesse caso, o potencial no ponto x é dado por

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{|x - x_j|}. \tag{2}$$

A substituição de uma distribuição puntual de cargas por uma distribuição contínua com densidade ρ conduz a somatória de (2) à integral de (1).

Uma dedução formal de (2) e (1) pode ser feita com o auxílio do delta de Dirac. O **delta de Dirac** é a "função" $\delta(x)$ definida pelas seguintes propriedades:

1. Para $x, y \in \mathbb{R}^3$, temos

   $$\delta(x - y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq y \\ \infty & \text{se } x = y \end{cases}$$

   e

   $$\int_{\mathbb{R}^3} \delta(x - y)\, \mathrm{d}x = 1.$$

2. Se $f(x)$ é uma função contínua com suporte limitado, ou seja, que não vale zero apenas em uma região limitada do $\mathbb{R}^3$, então

   $$\int_{\mathbb{R}^3} \delta(x - y) f(x)\, \mathrm{d}x = f(y).$$

Tal "função" delta de Dirac não existe no sentido usual de função, mas existe no **sentido de distribuição**.

Interpretamos $q\delta(x - y)$ como a densidade de carga, no ponto x, de uma distribuição de matéria constituída por uma única partícula no ponto

y com carga elétrica q. Logo, no caso de uma distribuição puntual de N partículas localizadas nos pontos $x_1, \dots, x_N$ com cargas $q_1, \dots, q_N$, podemos representar a densidade de carga desse sistema por

$$\rho(x) = \sum_{j=1}^{N} q_j \delta(x - x_j).$$

Substituindo essa expressão em (1) e usando as propriedades do delta de Dirac, obtemos (2). Em particular, quando $N = 1$, obtemos o potencial $\varphi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|x-y|}$, que é gerado por uma partícula no ponto $y = x_1$ com carga $q = q_1$. Essa função φ é solução da Equação de Poisson com $\rho(x) = q\delta(x-y)$. Portanto, a função

$$G_y(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|}$$

é solução da equação

$$-\Delta G_y(x) = \delta(x - y).$$

A função $G_y(x)$ é chamada **função de Green para a Equação de Poisson**.

Agora, usando a função $G_y(x)$ podemos obter uma solução da Equação de Poisson. Consideramos a função em (1) e escrevemos

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_\Omega \frac{1}{|x-y|} \rho(y) \, \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_\Omega G_y(x) \rho(y) \, \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Vamos verificar **formalmente** que essa função $\varphi(x)$ é solução da Equação de Poisson. De fato, calculando $\Delta\varphi$ com respeito à variável x e usando as propriedades do delta de Dirac, obtemos

$$\begin{aligned}\Delta\varphi(x) &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_\Omega \Delta G_y(x) \rho(y) \, \mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0} \int_\Omega \delta(x-y) \rho(y) \, \mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(x).\end{aligned}$$

Portanto, a função em (1) é de fato uma solução da Equação de Poisson.

Os cálculos formais apresentados acima **podem ser justificados**. Em particular, pode-se definir precisamente o conceito de distribuição e ver que o delta de Dirac é apenas um exemplo desses objetos.

Em resumo, resolvendo a Equação de Poisson no caso em que a densidade ρ é o delta de Dirac, obtemos a função de Green. Usando a função de Green, obtemos uma solução da Equação de Poisson para qualquer densidade ρ.