O Problema de Valor Inicial para a Equação das Ondas

As vibrações de uma corda infinita livre podem ser descritas pelo seguinte modelo matemático. Imagine uma corda em um plano xu, em que cada partícula que constitui a corda se move apenas na direção u. Nesse caso, dizemos que o movimento da corda é transversal ao eixo x. Podemos pensar que o movimento da corda da origem a uma onda que se propaga na direção x. Seja $u(x,t)$ a posição vertical da corda no ponto x e no instante t. Vamos supor que u é descrita pela equação das ondas em uma dimensão:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante positiva que depende das propriedades da corda, a variável $x \in \mathbb{R}$ denota a posição horizontal, a variável $t \in \mathbb{R}$ representa o instante de tempo, e a incógnita $u(x,t) \in \mathbb{R}$ denota a posição vertical da corda no ponto x e no instante t. Vamos supor que u satisfaz as seguintes condições iniciais:

$$u(x,0) = \xi(x) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

onde ξ é uma função de classe C^2 que representa a posição inicial da corda. Para simplificar, tomamos $c = 1$. Obtemos assim o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u \in C^2(\mathbb{R}^2), & \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 & \text{para todo } (x,t) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x,0) = \xi(x) & \text{para todo } x \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Uma solução do problema acima é obtida da seguinte forma: Definimos

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\xi(x+t) + \xi(x-t)\right]$$

para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. Como $\xi \in C^2(\mathbb{R})$, é simples verificar que essa função $u(x,t)$ é de classe C^2 e satisfaz as três equações acima. Portanto, ela é solução do problema de valor inicial. Como a equação acima é de segunda ordem e a solução acima é duas vezes diferenciável, no sentido usual, essa solução é chamada *solução clássica*. Por outro lado, a expressão acima para $u(x,t)$ faz sentido mesmo que ξ não seja se classe C^2. Por exemplo, se a função ξ for contínua, então a fórmula acima para $u(x,t)$ define uma função contínua em todo plano $\mathbb{R}^2$. Nesse caso, a expressão para $u(x,t)$ não é mais uma solução clássica da equação, pois não define uma função duas vezes diferenciável. Todavia, é natural questionar se é possível interpretar essa função $u(x,t)$ como solução da equação em um novo sentido, mais geral do que o sentido clássico. É possível fazer tal interpretação, como descrevemos a seguir.

Para responder a questão acima, procedemos da seguinte forma. Suponha que uma função $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ satisfaz $(\partial^2 u/\partial t^2 - \partial^2 u/\partial x^2)(x,t) = 0$ para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. Para uma função $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, seja $R \in (0,\infty)$ tal que $\operatorname{supp} \varphi \subset (-R,R) \times (-R,R)$. Então

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big) \varphi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\ &= \int_{-R}^{R} \int_{-R}^{R} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \varphi(x,t) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x - \int_{-R}^{R} \int_{-R}^{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \varphi(x,t) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Integrando duas vezes por partes, obtemos

$$\int_{-R}^{R} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \varphi(x,t) \, \mathrm{d}t = \int_{-R}^{R} u(x,t) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x,t) \, \mathrm{d}t,$$

onde usamos $\varphi(\pm R, t) = 0$ e $(\partial \varphi/\partial t)(\pm R, t) = 0$ para todo $t \in (-R,R)$. Analogamente, chegamos a $\int_{-R}^{R} (\partial^2 u/\partial x^2) \varphi \, \mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} u(x,t) (\partial^2 \varphi/\partial x^2) \, \mathrm{d}x$. Substituindo essas fórmulas na igualdade acima, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big) u \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = 0.$$

Nessa expressão, a integral do lado esquerdo faz sentido mesmo que a função u seja apenas contínua. Essa observação sugere a seguinte definição:

Dizemos que uma função $u \in C(\mathbb{R}^2)$ é uma *solução fraca* da equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^2$$

se

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big) u \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = 0 \quad \text{para todo } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Agora, vamos verificar que, se ξ é uma função contínua em $\mathbb{R}$, a função $u(x,t) = \frac{1}{2}\big[\xi(x+t) + \xi(x-t)\big]$ é uma solução fraca da equação das ondas em $\mathbb{R}^2$. Para $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, calculamos

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\Big) u \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\Big)[\xi(x+t) + \xi(x-t)] \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\Big(\frac{y+z}{2}, \frac{y-z}{2}\Big)[\xi(y) + \xi(z)] \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&\quad + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\Big(\frac{y+z}{2}, \frac{y-z}{2}\Big)[\xi(y) + \xi(z)] \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,
\end{aligned}
$$

onde fizemos a mudança de variáveis $y = x + t$ e $z = x - t$, que implica $x = (y+z)/2$ e $t = (y-z)/2$. Logo $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -(1/2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ pois

$$
\frac{\partial(x,t)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial t}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial z} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.
$$

Definimos $\psi(y,z) = \varphi\big(\frac{y+z}{2}, \frac{y-z}{2}\big)$ para $(y,z) \in \mathbb{R}^2$. Então

$$
\frac{\partial\psi}{\partial y}(y,z) = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big(\frac{y+z}{2}, \frac{y-z}{2}\Big) + \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big(\frac{y+z}{2}, \frac{y-z}{2}\Big)
$$

e

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial y}(y,z) &= \frac{1}{4}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\Big(\frac{y+z}{2}, \frac{y-z}{2}\Big) - \frac{1}{4}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x}\Big(\frac{y+z}{2}, \frac{y-z}{2}\Big) \\
&\quad + \frac{1}{4}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}\Big(\frac{y+z}{2}, \frac{y-z}{2}\Big) - \frac{1}{4}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\Big(\frac{y+z}{2}, \frac{y-z}{2}\Big),
\end{aligned}
$$

onde observamos um cancelamento de termos, devido a uma igualdade entre derivadas mistas. Substituindo essa expressão na igualdade acima, obtemos

$$
\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\Big) u \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z}(y,z)[\xi(y) + \xi(z)] \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.
$$

Seja $R \in (0,\infty)$ tal que $\operatorname{supp}\varphi \subset (-R,R) \times (-R,R)$. Então $\operatorname{supp}\psi$ está contido no conjunto de pontos $(y,z) \in \mathbb{R}^2$ tais que $-2R < y+z < 2R$ e $-2R < y-z < 2R$. Logo $\operatorname{supp}\psi \subset (-R',R') \times (-R',R')$ para $R' > R$ (onde podemos tomar $R' = 2R$). Usando a igualdade acima e integrando, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\Big) u \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &= \int_{-R'}^{R'} \xi(y)\left[\int_{-R'}^{R'} \frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial y}(y,z)\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}y \\
&\quad + \int_{-R'}^{R'} \xi(z)\left[\int_{-R'}^{R'} \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z}(y,z)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z \\
&= \int_{-R'}^{R'} \xi(y)\Big[\frac{\partial\psi}{\partial y}(y,R') - \frac{\partial\psi}{\partial y}(y,-R')\Big]\,\mathrm{d}y \\
&\quad + \int_{-R'}^{R'} \xi(z)\Big[\frac{\partial\psi}{\partial z}(R',z) - \frac{\partial\psi}{\partial z}(-R',z)\Big]\,\mathrm{d}z \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde usamos $(\partial\psi/\partial y)(y, \pm R') = 0$ para $y \in (-R', R')$ e $(\partial\psi/\partial z)(\pm R', z) = 0$ para $z \in (-R', R')$. Em resumo, demonstramos o seguinte resultado:

> Para cada $\xi \in C(\mathbb{R})$, a função $u(x,t) = \frac{1}{2}\big[\xi(x+t) + \xi(x-t)\big]$ é uma solução fraca da equação
>
> $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^2.$$